Материалы для проведения регионального этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Второй день

30–31 января 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, Н. А. Гладков, М. А. Григорьев, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, С. О. Кудря, В. Д. Лучкин, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, Б. А. Обухов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. Д. Труфанов, М. А. Фадин, И. И. Фролов, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2016–2017 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2016–2017 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **30 января 2017 г.** (I тур) и **31 января 2017 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 8 задач — по 4 задачи в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–4 — I тур, задачи 5–8 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2016–2017 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, проведение апелляций и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется также осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016–2017 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

Ответ. 1250 сумм.

Решение. Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50 - x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна, в таблице стоит хотя бы $x^2 + (50 - x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2+(50-x)^2 = 2x^2-100x+50^2 = 2(x-25)^2+2\cdot 25^2 \geqslant 2\cdot 25^2 = 1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500 - 1250 = 1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, \ldots, 25+\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $26, 27, \ldots, 49, 50, 26-\sqrt{2}, 27-\sqrt{2}, \ldots, 50-\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2 \cdot 25^2 = 1250$ сумм рационального и иррационального чисел.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказательство того, что рациональных чисел не более 1250 — 4 балла.

Если это доказательство проведено лишь в частном случае, когда вдоль левой (или верхней стороны) стоит равное количество рациональных и иррациональных чисел — за эту часть решения ставится 1 балл вместо четырёх.

Неравенство $x^2 + (50 - x)^2 \geqslant 1250$ (или эквивалентное) используется без доказательства — снимается 1 балл.

Верный пример, показывающий, что могло быть ровно 1250 рациональных чисел — 3 балла.

Утверждение, что сумма рационального и иррационального чисел иррациональна, можно использовать без доказательства.

9.6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$. (*Б. Обухов*)

Первое решение. Поскольку $\angle AHK = \angle AMK = 90^\circ$, точки A, H, M и K лежат на окружности ω с диаметром AK (см. рис. 1). По условию, хорда HM этой окружности стягивает угол $\angle MAH = 30^\circ$, поэтому $HM = 2R\sin 30^\circ = AK/2$. С другой стороны, HM — медиана в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому $BC = 2HM = AK$, что и требовалось доказать.

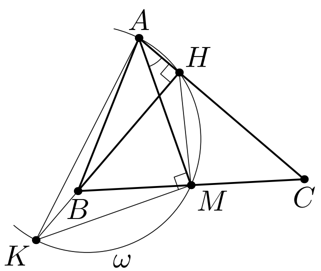

Рис. 1

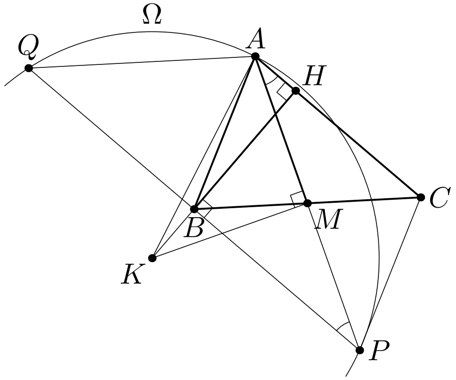

Рис. 2

Второе решение. Достроим треугольник ABC до параллелограммов $ABPC$ и $AQBC$ (см. рис. 2); тогда $BP = AC = BQ$ и $KH \perp PQ$. Кроме того, точка M — середина AP (как точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABPC$). Значит, прямые MK и HK — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и PQ. Следовательно, точка K — центр окружности Ω, описанной около треугольника APQ. Далее, $\angle APQ = \angle PAC = 30^\circ$, поэтому хорда AQ окружности Ω равна радиусу AK. Наконец, из параллелограмма $AQBC$ получаем $BC = AQ = AK$.

Комментарий. Замечено, что точки A, H, M и K лежат на одной окружности — 2 балла.

9.7. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны. (*А. Грибалко*)

Решение. Докажем *утверждение задачи* индукцией по количеству n сторон многоугольника. База индукции $n = 3$ очевидна. Теперь выведем *утверждение* для k-угольника ($k \geqslant 4$), предполагая, что оно верно для многоугольников с количеством сторон меньшим, чем k.

Итак, пусть выпуклый k-угольник P разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Рассмотрим одну из этих диагоналей, назовем её d. Диагональ d делит P на два многоугольника P_1 и P_2. У каждого из многоугольников P_1 и P_2 количество сторон меньше k, и каждый из них разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. По нашему предположению, в многоугольнике P_1 имеются равные стороны a_1 и b_1. Если ни a_1, ни b_1 не совпадает с d, то a_1 и b_1 — стороны P, и наше *утверждение* доказано.

Иначе пусть, например, b_1 совпадает с d. Аналогично, в многоугольнике P_2 найдутся равные стороны a_2 и b_2, и если ни a_2, ни b_2 не совпадает с d, то *утверждение* доказано. Наконец, пусть, например, b_2 совпадает с d. Но тогда a_1 и a_2 — различные стороны многоугольника P, каждая из которых равна d, то есть a_1 и a_2 — требуемая пара сторон.

Комментарий. За доказательство утверждения задачи только в некоторых частных случаях разбиений баллы не начисляются.

За доказательство утверждения задачи для некоторых небольших значений k (количества сторон) баллы не начисляются.

Возможен и другой вариант индукционного рассуждения, в котором используется факт о том, что в данном разрезании (триангуляции) найдется диагональ, делящая выпуклый

n-угольник на треугольник и $(n-1)$-угольник. Если в верном решении этот факт используется без доказательства — баллы за это не снимаются. Если же попытки доказательства этого факта не приводят к успеху — снимается 1 балл.

9.8. Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала. (*И. Богданов*)

Решение. Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечётных, то среди произведений троек чисел ровно C_k^3 нечётных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечётным ровно тогда, когда C_k^3 нечётно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1).

Заметим, что число $C_{43}^3 = \dfrac{43 \cdot 42 \cdot 41}{6}$ нечётно, а число $C_{44}^3 = \dfrac{44}{41} \cdot C_{43}^3$ чётно. Значит, в первую минуту добавится нечётное число, а дальше будут добавляться только чётные. Итак, после первой минуты среди чисел на карточках всегда будет ровно 44 нечётных.

Рассмотрим числа на карточках после n минут. Пусть T_n — сумма всех произведений троек этих чисел, а D_n — сумма всех произведений пар этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений троек чисел, среди которых есть только что добавленное, то есть прибавлением D_nT_n; итак, $T_{n+1} = T_n + D_nT_n = T_n(1 + D_n)$. Заметим при этом, что $D_n \equiv C_{44}^2 = 22 \cdot 43 \equiv 0 \pmod 2$ при $n \geqslant 1$. Значит, при $n \geqslant 1$ число $1 + D_n$ нечётно, и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Итак, после первой минуты степень двойки, на которую делится добавляемое число T_n, всегда равна степени двойки, на которую делится T_1. Значит, если бы после второй минуты на карточках не было числа, делящегося на 2^{10000}, то и впоследствии такого числа бы не появилось. Отсюда и следует требуемое.

Комментарий. Доказано, что, начиная со второй минуты, на добавляемых карточках появляются только чётные числа — 2 балла.

10 класс

10.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

Ответ. 1250 произведений.

Решение. Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50 - x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально, в таблице стоит хотя бы $x^2 + (50 - x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 50^2 = 2(x - 25)^2 + 2 \cdot 25^2 \geqslant \geqslant 2 \cdot 25^2 = 1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500 - 1250 = 1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, 25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $26, 27, \ldots, 49, 50, 26\sqrt{2}, 27\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2 \cdot 25^2 = 1250$ произведений рационального и иррационального чисел.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказательство того, что рациональных чисел не более 1250 — 4 балла.

Если доказательство проведено лишь в частном случае, когда вдоль левой (или верхней стороны) стоит равное количество рациональных и иррациональных чисел — за эту часть решения ставится 2 балла вместо 4.

Неравенство $x^2 + (50 - x)^2 \geqslant 1250$ (или эквивалентное) используется без доказательства — снимается 1 балл.

Верный пример, показывающий, что могло быть ровно 1250 рациональных чисел — 3 балла.

Утверждение, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел иррационально, можно использовать без доказательства.

10.6. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей. (*И. Богданов, П. Кожевников*)

Решение. Пусть $S_1, \ldots, S_{100}$ — числа, которые были записаны на доске в первые 100 минут. Пусть перед дописыванием числа S_i на доске были числа $a_1, \ldots, a_k$. Тогда $S_i = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$, а следующее дописанное число есть $S_{i+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + S_i^2 = S_i + S_i^2$.

Итак, $S_{i+1} = S_i(S_i + 1)$. Значит, S_{i+1} содержит в своем разложении на простые множители все простые числа, на которые делится S_i; кроме того, поскольку S_i и $S_i + 1$ взаимно просты, S_{i+1} содержит хотя бы один новый простой множитель (делитель числа $1 + S_i$). Так как $S_1 > 1$, то S_1 содержит в своем разложении хотя бы один простой множитель. Отсюда последовательно получаем, что для $i = 1, 2, \ldots, 100$ число S_i содержит в своем разложении хотя бы i различных простых множителей. При $i = 100$ это дает решение задачи.

Комментарий. В обозначениях решения выше доказано, что $S_{i+1} = S_i + S_i^2$ — 4 балла.

Если в верном решении после получения равенства $S_{i+1} = S_i(S_i + 1)$ делается вывод о появлении нового простого множителя без ссылки на взаимную простоту чисел S_i и $S_i + 1$ — снимается 1 балл.

10.7. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны. (*А. Грибалко*)

Решение. Докажем *утверждение задачи* индукцией по количеству n сторон многоугольника. База индукции $n = 3$ очевидна. Теперь выведем *утверждение* для k-угольника ($k \geqslant 4$), предполагая, что оно верно для многоугольников с количеством сторон меньшим, чем k.

Итак, пусть выпуклый k-угольник P разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Рассмотрим одну из этих диагоналей, назовем её d. Диагональ d делит P на два многоугольника P_1 и P_2. У каждого из многоугольников P_1 и P_2 количество сторон меньше k, и каждый из них разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. По нашему предположению, в многоугольнике P_1 имеются равные стороны a_1 и b_1. Если ни a_1, ни b_1 не совпадает с d, то a_1 и b_1 — стороны P, и наше *утверждение* доказано.

Иначе пусть, например, b_1 совпадает с d. Аналогично, в многоугольнике P_2 найдутся равные стороны a_2 и b_2, и если ни a_2, ни b_2 не совпадает с d, то *утверждение* доказано. Наконец, пусть, например, b_2 совпадает с d. Но тогда a_1 и a_2 — различные стороны многоугольника P, каждая из которых равна d, то есть a_1 и a_2 — требуемая пара сторон.

Комментарий. За доказательство утверждения задачи только в некоторых частных случаях разбиений баллы не начисляются.

За доказательство утверждения задачи для некоторых небольших значений k (количества сторон) баллы не начисляются.

Возможен и другой вариант индукционного рассуждения, в котором используется факт о том, что в данном разрезании (триангуляции) найдется диагональ, делящая выпуклый n-угольник на треугольник и $(n-1)$-угольник. Если в верном решении этот факт используется без доказательства — баллы за это не снимаются. Если же попытки доказательства этого факта не приводят к успеху — снимается 1 балл.

10.8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Так как четырёхугольник $ABCQ$ вписан и $AC \parallel DE$, имеем $\angle BEX = \angle BCA = \angle BQA = \angle BQX$. Следовательно, четырёхугольник $XBEQ$ вписан, откуда $\angle XBQ = \angle XEQ = \angle DEQ$. Аналогично, четырёхугольник $YBDP$ вписан, и $\angle PBY = \angle PDE$. По условию, $PD \parallel EQ$. Значит, $180^\circ = \angle PDE + \angle DEQ = \angle XBQ + \angle PBY$.

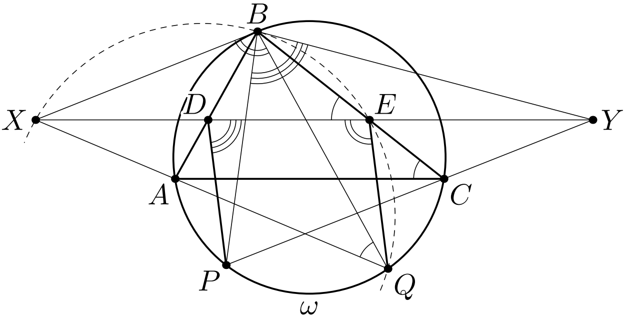

Рис. 3

Таким образом, $\angle XBY + \angle PBQ = \angle XBP + 2\angle PBQ + \angle QBY = \angle XBQ + \angle PBY = 180^\circ$.

Комментарий. Показано только, что точки X, B, E, Q (или Y, B, D, P) лежат на одной окружности — 3 балла.

11 класс

11.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

Ответ. 1275 произведений.

Решение. Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1225. Предположим, что среди рациональных чисел есть ноль и он выписан у верхней стороны таблицы.

Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел (среди которых есть ноль). Заметим, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально. Тогда в таблице есть как минимум $x(x-1)+(50-x)^2$ иррациональных чисел. Заметим, что $f(x) = x(x-1)+(50-x)^2 = 2x^2 - 101x + 50^2$. Вершина параболы $f(x)$ находится в точке $101/4 = 25{,}25$, поэтому минимальное значение $f(x)$ в целой точке достигается при $x = 25$ и оно равно $25\cdot 24+25^2 = 1225$.

Если же ноль заменить ненулевым рациональным числом, то количество иррациональных чисел может только увеличиться. Поэтому в таблице в любом случае не менее 1225 иррациональных чисел. Значит, в таблице не более $2500 - 1225 = 1275$ рациональных чисел.

Ровно 1275 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, 25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $0, 26, 27, \ldots, 49, 26\sqrt{2}, 27\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $25\cdot 24+25^2 = 1225$ произведений ненулевого рационального и иррационального чисел.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказательство того, что рациональных чисел не более 1275 — 4 балла.

Если доказательство проведено лишь в частном случае, когда вдоль левой (или верхней стороны) стоит равное количество рациональных и иррациональных чисел — за эту часть решения ставится 1 балл вместо 4.

Неравенство $x(x-1)+(50-x)^2 \geqslant 1225$ (или эквивалентное) используется без доказательства — снимается 1 балл.

Верный пример, показывающий, что могло быть ровно 1275 рациональных чисел — 3 балла.

Только пример из ненулевых чисел, показывающий, что могло быть ровно 1250 рациональных чисел — 1 балл.

Утверждение, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел иррационально, можно использовать без доказательства.

Если это утверждение существенно используется для любых (не обязательно ненулевых) чисел (то есть используется неверное утверждение!) — за задачу ставится не более 2 баллов.

11.6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причём точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Окружность ω, описанная около треугольника PHD, вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Проведём в окружности Γ диаметр BT (см. рис. 4). Заметим, что $\angle PDT = \angle BDT = 90^\circ$. Значит, $\angle PHT + \angle PDT = 180^\circ$, то есть точка T лежит на окружности ω. Поэтому $\angle PQT = \angle PHT = 90^\circ$, и четырёхугольник $PQTD$ — прямоугольник.

Рассмотрим общий серединный перпендикуляр ℓ к отрезкам DT и PQ. Он проходит через O, а значит, является и серединным перпендикуляром к AC. Значит, отрезки AP и CQ симметричны относительно ℓ и потому равны.

Комментарий. Доказано, что описанная около треугольника PHD окружность проходит через точку T на окружности окружности Γ. диаметрально противоположную точке B (или,

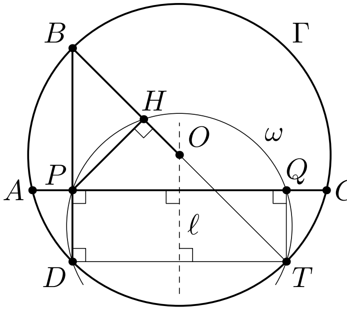

Рис. 4

эквивалентно, такую точку T на окружности Γ, что $DT \parallel AC$) — 3 балла.

11.7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны. (*О. Орлов*)

Решение. Обозначим проведённые прямые $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, упорядочив их направления по часовой стрелке (см. рис. 5). Формально это означает следующее. Рассмотрим произвольную точку плоскости O. Проведем через неё прямые, параллельные нашим, занумеруем их по часовой стрелке, а потом присвоим нашим прямым те же номера, которые получили соответствующие им новые прямые.

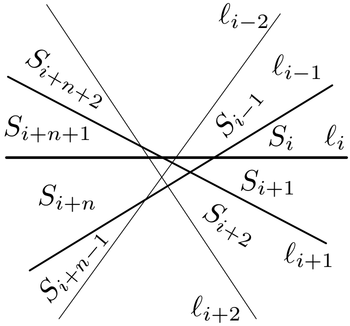

Рис. 5

Среди областей, на которые наши прямые разрезали плоскость, есть $2n$ бесконечных *кусков*; обозначим их по часовой стрелке $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ так, что прямая ℓ_i разделяет куски S_i и S_{i+1}, а также куски S_{i+n} и S_{i+n+1}. (Здесь и далее мы считаем, что $S_{2n+1} = S_1$.)

Для начала во все области (конечные и бесконечные) поставим по 1. Для каждой прямой ℓ_i обозначим через Σ_i разность сумм чисел справа и слева от ℓ_i (мы считаем, что куски S_i и S_{i+n+1} лежат слева от ℓ_i). Если $\Sigma_i > 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}\Sigma_i$ к числам, стоящим в S_i и S_{i+1+n}. При этом все числа Σ_j при $j \neq i$ не изменились, поскольку области S_i и S_{i+1+n} лежат по разные стороны относительно любой прямой, кроме ℓ_i. Число же Σ_i стало равно нулю. Аналогично, если $\Sigma_i < 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}|\Sigma_i|$ к числам, стоящим в S_{i+1} и S_{i+n}; опять же, Σ_i станет равна 0, а остальные Σ_j не изменятся.

Такими операциями мы последовательно сделаем каждое Σ_i равным нулю, не меняя остальных.

Замечание. В некоторых работах может происходить попытка коррекции какой-то исходной расстановки путём добавления отрицательных чисел к числам в областях. В подобном решении нужно очень тщательно следить, чтобы итоговые числа в областях оставались положительными; обычно добиться этого достаточно сложно.

Комментарий. Если в работе предъявлен алгоритм, по итогам работы которого возможно появление неположительных чисел в областях — не более 2 баллов за задачу.

11.8. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d? (*И. Богданов*)

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечётных, то среди произведений чисел по 12 ровно C_k^{12} нечётных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечётным ровно тогда, когда C_k^{12} нечётно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1).

Нетрудно заметить, что число C_{28}^{12} нечётно (это следует из того, что степени двойки, входящие в $28\cdot 27\cdot\ldots\cdot 17$ и $12\cdot 11\cdot\ldots\cdot 1$, равны). Далее, поскольку $C_{28+t}^{12}=\dfrac{(28+1)(28+2)\ldots(28+t)}{(16+1)(16+2)\ldots(16+t)}\cdot C_{28}^{12}$, получаем, что наименьшее t, при котором C_{28+t}^{12} чётно, равно 4. Итак, количество нечётных чисел на карточках будет расти, пока не достигнет 32 (на 4-й минуте), а после этого на карточках всегда будет ровно 32 нечётных числа.

Рассмотрим числа на карточках после $n\geqslant 4$ минут. Пусть T_n — сумма всех произведений 12 из этих чисел, а D_n — сумма всех произведений 11 из этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений по 12 чисел, среди которых есть только что добавленное, то есть прибавлением T_nE_n; итак, $T_{n+1}=T_n+E_nT_n=T_n(1+E_n)$. Заметим при этом, что $E_n\equiv C_{32}^{11}\pmod 2$ при $n\geqslant 4$, а число $C_{32}^{11}=\frac{12}{21}\cdot C_{32}^{12}$ чётно. Значит, при $n\geqslant 4$ число $1+E_n$ нечётно, и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Выберем теперь d так, чтобы после пятой минуты ни одно из чисел на карточках не делилось на 2^d; в частности, только что добавленное число T_4 также не будет делиться на 2^d. Значит, и все числа $T_5, T_6, \ldots$ не будут делиться на 2^d, а это в точности числа, написанные на карточках, добавляемых после пятой минуты. Итак, на карточках никогда не появится числа, делящегося на 2^d.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Описано, в каких случаях число на добавляемой карточке нечётно (например, как в первом абзаце решения) — 1 балл.

Доказано, что, начиная с пятой минуты, добавляются только чётные числа — добавляется ещё 1 балл.